

Логарифмы

Определение логарифма

Для положительных чисел $a \neq 1$ и b логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a , чтобы получить b :

$$\log_a b = c \iff a^c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

Это выражение называется *основным логарифмическим тождеством*.

Замечание

Определение автоматически задаёт *область допустимых значений* (ОДЗ):

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Нарушение хотя бы одного из этих условий приводит к потере смысла выражения.

Если вы попытаетесь как-то осознать прочитанное, может задаться резонный вопрос: почему основание не может быть отрицательным или равняться единице?

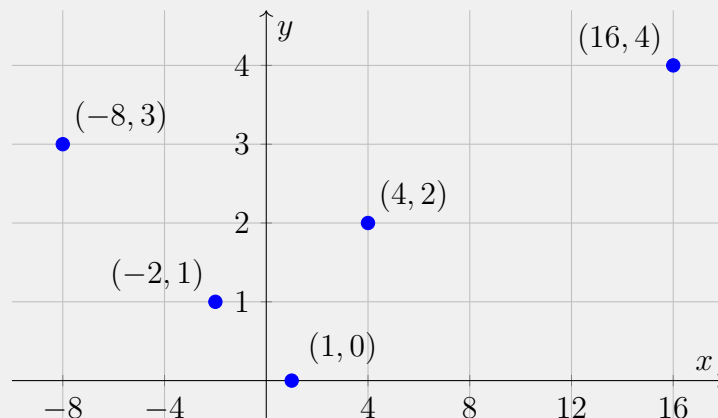
Почему не может равняться единице, понятно сразу: выражение $\log_1(1)$ не может быть однозначным, единица в любой степени даст единицу. Стоит добавить, что выражение вроде $\log_1(5)$ вообще не имеет смысла, так как уравнение $1^x = 5$ не имеет решений. Поэтому $a \neq 1$.

Почему нельзя использовать отрицательные числа в основании

Ограничение на основание делается для того, чтобы функция была красивой и непрерывной, и выполнялись крутые свойства, о которых поговорим дальше. А пока рассмотрим функцию $y = \log_{-2} x$.

$$y = \log_{-2} x \iff (-2)^y = x$$

y	0	1	2	3	4
$x = (-2)^y$	1	-2	4	-8	16



Что, если показатель степени будет дробным? Для несократимых дробей с нечётным знаменателем значение $(-2)^y$ является действительным:

$$(-2)^{1/3} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

Но если, например, возвести -2 в степень $0,5$ (то есть $\frac{1}{2}$), то получим

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R},$$

а такое значение в действительных числах не существует.

Получается, что для бесконечного множества чисел (дробных степеней с чётным знаменателем) наша функция просто ломается и выдаёт ошибку.

График такой функции **имеет разрыв в каждой своей точке**, что абсолютно неинтересно для целей нашего дальнейшего анализа, так как у него нет ни промежутков монотонности, ни промежутков знакопостоянства, ни каких-либо других красивых и плавных вещей.

Поэтому отрицательные числа решили не использовать ни в качестве основания логарифма ($a > 0$), ни в качестве основания показательной функции. Ноль также в основании не используют, потому что при возведении в отрицательную степень по сути будет происходить деление на 0:

$$0^{-2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0}$$

Из ограничения основания ($a > 0$) сразу следует ограничение подлогарифмического, так как в какую степень мы бы ни возводили положительное число, получим также положительное: $b > 0$.

Базовые свойства логарифмов

Прежде чем переходить к сложным преобразованиям, зафиксируем фундаментальные свойства, на которых строится вся работа с логарифмами. Во всех формулах ниже предполагается, что переменные удовлетворяют ОДЗ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$).

Базовые значения

Любое число в нулевой степени дает единицу, а в первой степени — само себя. Поэтому для любого допустимого основания a :

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_a a = 1$$

Сложение и вычитание логарифмов

Логарифм произведения равен сумме логарифмов, а логарифм частного — их разности:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Замечание

Эти свойства являются прямым следствием свойств степеней. При умножении чисел с одинаковыми основаниями их показатели складываются ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$), а при делении — вычитаются.

Часто эти формулы применяют **справа налево**, чтобы «схлопнуть» сумму или разность логарифмов с одинаковыми основаниями в одно красивое выражение.

Вынесение степени

Степень подлогарифмического выражения выносится вперед как множитель (в числитель), а степень основания — как обратное число (в знаменатель):

$$\log_a(b^p) = p \log_a b$$

$$\log_{a^q} b = \frac{1}{q} \log_a b$$

Эти правила можно объединить в одну универсальную формулу:

$$\log_{a^q}(b^p) = \frac{p}{q} \log_a b$$

Доказательство

Докажем, что $\log_a(b^p) = p \log_a b$. Обозначим логарифм за переменную:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Возведем обе части второго равенства в степень p :

$$(a^x)^p = b^p \implies a^{px} = b^p$$

Теперь снова применим определение логарифма. В какую степень нужно возвести основание a , чтобы получить b^p ? В степень px . Запишем это:

$$\log_a(b^p) = px$$

Делаем обратную замену, вспоминая, что $x = \log_a b$:

$$\log_a(b^p) = p \log_a b$$

■

Формула вынесения степени из основания доказывается аналогично. Или же можно применить [переход к новому основанию](#) и факт выше, тогда это свойство выводится буквально в одну строку.

Следствие из свойства степеней

Если показатели степеней основания и аргумента равны, они просто сокращаются:

$$\log_{a^p}(b^p) = \frac{p}{p} \log_a b = \log_a b$$

Это позволяет быстро избавляться от корней. Например: $\log_{\sqrt{a}}(\sqrt{b}) = \log_{a^{0.5}}(b^{0.5}) = \log_a b$.

Продвинутое свойства логарифмов

В выражениях ниже основания и подлогарифмические будем считать допустимыми. С помощью $\log$ будем обозначать логарифм по одному и тому же допустимому основанию.

Формула перехода к новому основанию

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Пусть $x = \log_a b \implies a^x = b$. Прологарифмируем обе части по основанию c :

$$\log_c(a^x) = \log_c b, \quad x \log_c a = \log_c b, \quad \underbrace{x}_{\log_a b} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Важный частный случай:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

«Лесенка»

Мы можем поменять местами основание степени и подлогарифмическое выражение в следующей ситуации:

$$a^{\log c} = c^{\log a}$$

$$a^{\log_b c} = (b^{\log_b a})^{\log_b c} = b^{\log_b a \cdot \log_b c} = (b^{\log_b c})^{\log_b a} = c^{\log_b a}$$

«Сокращение» подлогарифмического и основания

При произведении логарифмов соседние одинаковые подлогарифмическое и основание можно убрать:

$$\log_a \cancel{b} \cdot \log_b c, \quad \log_a b \cdot \log_b c = \frac{\ln \cancel{b}}{\ln a} \cdot \frac{\ln c}{\ln \cancel{b}} = \log_a c$$

Внимание: это лишь удобный визуальный трюк для быстрого применения формулы! Помните, что логарифм нельзя оторвать от аргумента и сократить как обычную алгебраическую переменную.

Перестановка подлогарифмических выражений

При произведении логарифмов их подлогарифмические можно переставлять местами:

$$\log_c a \cdot \log_d b = \log_c b \cdot \log_d a$$

Действительно, обе части равны $\frac{\log a \cdot \log b}{\log c \cdot \log d}$.

Будьте аккуратны с ОДЗ

Для логарифмов по одному и тому же допустимому основанию:

$$\log b = \log c \iff \begin{cases} b = c, \\ b > 0 \text{ или } c > 0. \end{cases}$$

Так как $b = c$, ограничение на знак можно применить к более удобной для этого части.

При вынесении **чётной степени** из-под логарифма появляется модуль. Это сделано на случай, когда в чётную степень возводится отрицательное число, чтобы сохранить исходную ОДЗ ($x \neq 0$):

$$\log(x^{2n}) = 2n \log |x|$$

Чётную степень можно вынести не полностью. Тогда ставить модуль не требуется, поскольку новое подлогарифмическое выражение останется неотрицательным (при учёте $x \neq 0$; $n, k \in \mathbb{N}$):

$$\log(x^{4nk}) = 2n \log(x^{2k})$$

В выражении ниже, так как $xy > 0$, числа x и y могут оказаться отрицательными, что нарушит ОДЗ. Поэтому корректная формула имеет модули в разложении:

$$\log(xy) = (\log x + \log y \text{ ?}) = \log |x| + \log |y|$$

Грамотный учёт ОДЗ помогает правильно раскрывать возникающие модули.

Важная идея

Степень ВСЕГДА можно вносить под знак логарифма, а сумму логарифмов — объединять в один логарифм. Потому что эти преобразования идут от более строгого ОДЗ к менее строгому.

Главное — не забывать про исходное ОДЗ!