

Арктрига без фигни

То, что казалось формулами, ниспосланными богами ЕГЭ, здесь выводится без фигни.

Раз#еби за БВИ — @fkbvi

Содержание

1	Зачем вообще нужны обратные тригонометрические функции?	2
2	Почему нельзя просто сказать: « $\arcsin$ — обратная к $\sin$ »?	2
3	Как выбирают промежутки для аркфункций?	3
4	Определения обратных тригонометрических функций	4
5	Первые формулы	5
5.1	Почему равенство $\arcsin(\sin x) = x$ выполняется не всегда?	5
6	Геометрический вывод формул	6
7	Формулы для отрицательного аргумента	8
8	Задача с КФУ 24/25, 11 класс	8
9	Бонус. Производные аркфункций	9
10	Все выведенные формулы	11

1. Зачем вообще нужны обратные тригонометрические функции?

Обычные тригонометрические функции работают так:

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \operatorname{tg} x \quad x \mapsto \operatorname{ctg} x.$$

То есть мы, **зная угол**, находим его синус, косинус или тангенс.

Но в задачах часто бывает наоборот: нам известно значение синуса, косинуса или тангенса, а **нужно восстановить угол** x . Например:

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{tg} x = 2, \quad x = ?$$

Именно для этого вводят **обратные тригонометрические функции**. Их также называют *аркфункциями*:

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x.$$

Их смысл очень простой:

- $\arcsin x$ — это угол, синус которого равен x ;
- $\arccos x$ — это угол, косинус которого равен x ;
- и т. д.

Но здесь возникает важная проблема.

2. Почему нельзя просто сказать: «arcsin — обратная к sin»?

Чтобы у функции была обратная, она должна принимать **каждое значение ровно один раз**. Иначе по одному числу нельзя однозначно восстановить исходный аргумент.

Для ясности посмотрим на синус:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Получается, синусу $1/2$ соответствуют многие углы. Значит, на всей числовой прямой функция $\sin x$ **не имеет обратной**.

То же самое верно и для $\cos x$, и для остальных функций, потому что они периодические.

Чтобы ввести обратную функцию, надо сначала **ограничить** обычную тригонометрическую функцию таким промежутком, где она:

1. принимает все нужные значения;
2. и делает это по одному разу.

Именно поэтому в обратной тригонометрии так важны **промежутки значений**, в чём мы убедимся дальше.

3. Как выбирают промежутки для аркфункций?

Синус, например, на всей прямой не взаимно однозначен, но на промежутке

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

он строго возрастает и принимает все значения от -1 до 1 .

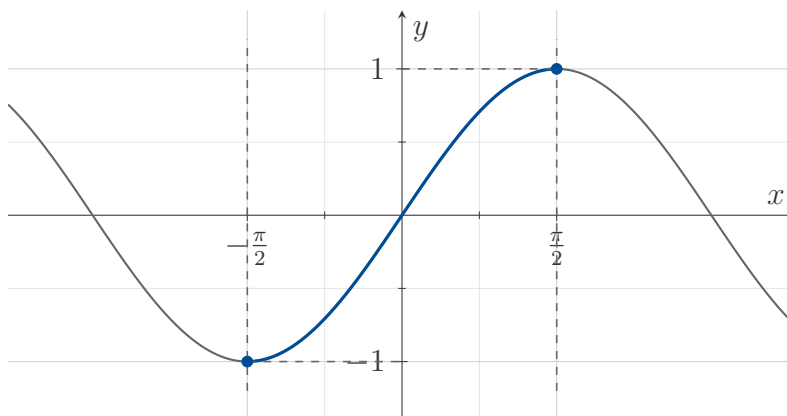


Рис. 1: $y = \sin x$

Поэтому **именно этот промежуток** становится областью значений $\arcsin x$.

$$E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

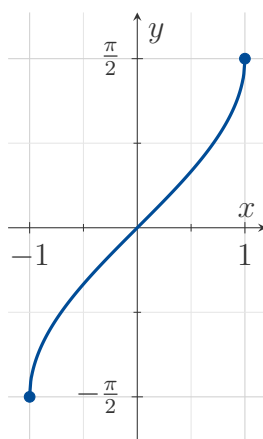
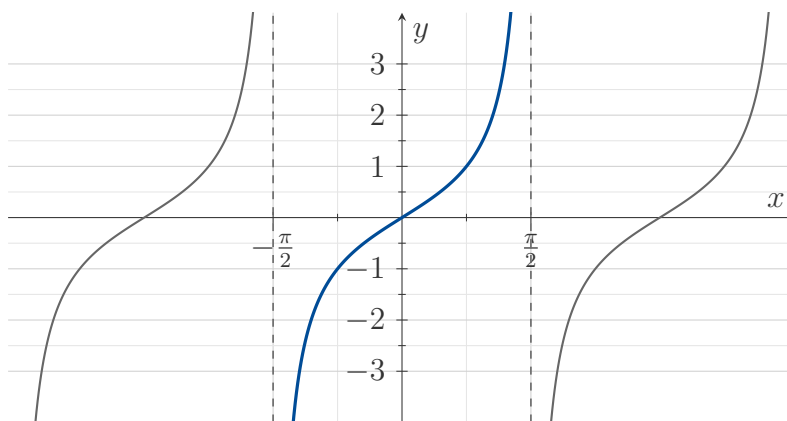
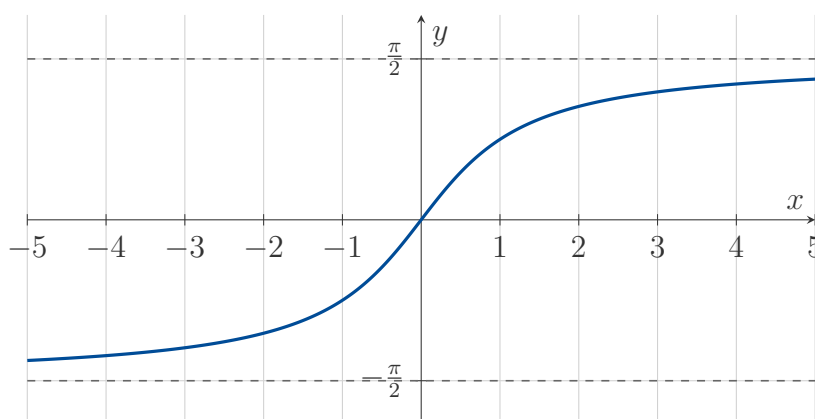


Рис. 2: $y = \arcsin x$

Аналогичным образом выбирают возможные значения для остальных обратных тригонометрических функций:

$$E(\arccos x) = [0, \pi], \quad E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad E(\operatorname{arccotg} x) = (0, \pi)$$

У арктангенса круглые скобки, потому что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ не определён при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ (иначе знаменатель обратится в ноль), поэтому значения $\operatorname{arctg} x$ могут лишь сколь угодно близко подходить к $\pm\frac{\pi}{2}$, но никогда их не достигают. Та же логика для арккотангенса.

Рис. 3: $y = \operatorname{tg} x$ Рис. 4: $y = \operatorname{arctg} x$

4. Определения обратных тригонометрических функций

По полученным областям значений можно сразу дать строгие определения обратных тригонометрических функций.

Определение. Обратные функции эквивалентны системам:

$$\begin{array}{ll}
 y = \arcsin x \iff \begin{cases} \sin y = x, \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} & y = \operatorname{arctg} x \iff \begin{cases} \operatorname{tg} y = x, \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases} \\
 y = \arccos x \iff \begin{cases} \cos y = x, \\ y \in [0, \pi]. \end{cases} & y = \operatorname{arcctg} x \iff \begin{cases} \operatorname{ctg} y = x, \\ y \in (0, \pi). \end{cases}
 \end{array}$$

Обратите внимание, что **области значений легко запомнить**: у синуса и тангенса, а также у косинуса и котангенса они совпадают с точностью до скобок.

5. Первые формулы

Следующие формулы непосредственно вытекают из определения обратных тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x, & x \in [-1, 1], \\ \cos(\arccos x) &= x, & x \in [-1, 1], \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x, & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) &= x, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Иными словами, если по значению тригонометрической функции восстановить угол, а затем вычислить тригонометрическую функцию от этого угла, то получится исходное значение x .

При этом x в каждом случае должен принадлежать **области значений** соответствующей *тригонометрической функции*, то есть **области определения обратной функции**.

Это естественно, поскольку в левой части каждого равенства стоит внешняя тригонометрическая функция, значение которой и равно x .

$$\begin{aligned}E(\sin x) &= E(\cos x) = [-1; 1], \\ D(\arcsin x) &= D(\arccos x) = [-1; 1], \\ E(\operatorname{tg} x) &= E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}, \\ D(\operatorname{arctg} x) &= D(\operatorname{arcctg} x) = \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Также верны другие формулы, но тут уже x — угол, который должен попадать в промежуток значений обратных функций:

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin x) &= x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \arccos(\cos x) &= x, & x \in [0, \pi], \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) &= x, & x \in (0, \pi).\end{aligned}$$

5.1. Почему равенство $\arcsin(\sin x) = x$ выполняется не всегда?

Пример.

Возьмём $x = \frac{5\pi}{6}$, тогда:

$$\sin x = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Но:

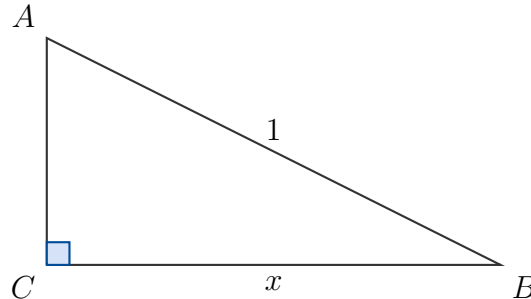
$$\arcsin(\sin x) = \frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6} = x,$$

$$\arcsin(\sin x) \neq x, \quad x = \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

6. Геометрический вывод формул

Если дочитал досюда, напиши в комментарии слово «бурмалда».

Совершаем предварительно только 2 действия: обозначим нижний катет через x и гипотенузу за 1.



Делаем последовательные выводы:

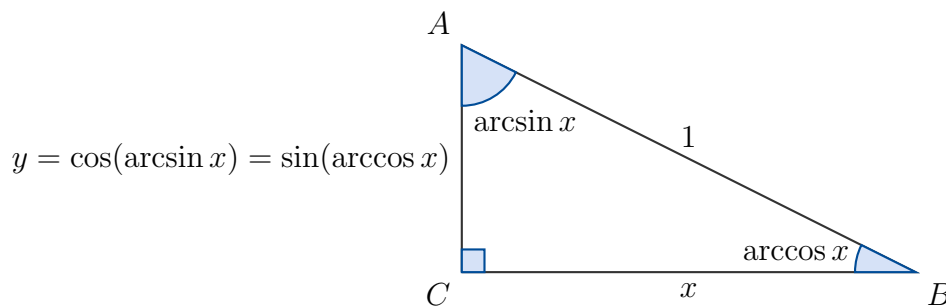
$$\sin A = \frac{\text{катет, противолежащий углу } \angle A}{\text{гипотенуза}} = \frac{x}{1} = x \implies \angle A = \arcsin x,$$

$$\cos B = \frac{\text{катет, прилежащий к углу } \angle B}{\text{гипотенуза}} = \frac{x}{1} = x \implies \angle B = \arccos x$$

Обозначим другой катет за y .

$$\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\angle A}) = \cos A = \frac{\text{катет, прилежащий к углу } \angle A}{\text{гипотенуза}} = \frac{y}{1} = y,$$

$$\sin(\underbrace{\arccos x}_{\angle B}) = \sin B = \frac{\text{катет, противолежащий углу } \angle B}{\text{гипотенуза}} = \frac{y}{1} = y$$



Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна $\pi/2$:

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$$

Выражаем катет y по теореме Пифагора:

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\boxed{\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}}$$

По рисунку можно сказать о тангенсах острых углов как об отношении соответствующих катетов:

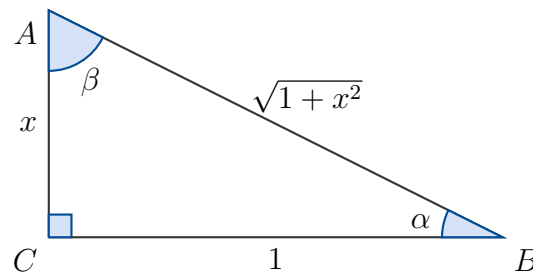
$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{y} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Выбор гипотенузы, равной 1, не ограничивает общность, ведь любой подобный треугольник можно привести к такому виду масштабированием.

Здесь x фактически является отношением катета к гипотенузе, а оно всегда меньше или равно 1. Это ограничение естественно, потому что дальше мы находим $\arcsin x$ и $\arccos x$. Таким образом, полученные формулы пока доказаны для $0 < x < 1$. Отрицательные значения разберём отдельно.

Найдём $\sin(\arctg x)$, $\cos \operatorname{arctg} x$, $\sin(\operatorname{arctg} x)$, $\cos(\operatorname{arctg} x)$. **Зачем?** Просто потому, что вошли во вкус :)



Здесь x и 1 непосредственно являются катетами, поэтому ограничения $x < 1$ уже нет. Пока считаем, что $x > 0$.

Предварительно выполним только 2 действия: обозначим углы за α и β , а катеты за x и 1.

$$\alpha = \arctg x, \quad \beta = \operatorname{arctg} x$$

Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике:

$$\arctg x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Вычислим синусы и косинусы непосредственно по рисунку:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \cos \beta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \sin \beta &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\sin(\arctg x) = \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

7. Формулы для отрицательного аргумента

Теперь выведем формулы, которые позволят перейти от положительных значений x к отрицательным.

$$\begin{aligned}\alpha &= \arcsin x \Rightarrow \sin \alpha = x \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha = -x \\ \arcsin(-x) &= \arcsin(\sin(-\alpha)) = -\alpha = -\arcsin x \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\Rightarrow -\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ оба угла принадлежат нужным промежуткам} \\ \boxed{\arcsin(-x) &= -\arcsin x}\end{aligned}$$

С арккосинусом будет не так очевидно:

$$\begin{aligned}\beta &= \arccos x \Rightarrow \cos \beta = x \\ \cos(\pi - \beta) &= -\cos \beta = -x. \\ \arccos(-x) &= \arccos(\cos(\pi - \beta)) = \pi - \beta = \pi - \arccos x \\ \beta \in [0; \pi] &\Rightarrow \pi - \beta \in [0; \pi], \text{ оба угла принадлежат нужным промежуткам} \\ \boxed{\arccos(-x) &= \pi - \arccos x}\end{aligned}$$

По абсолютно аналогичной логике:

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x}$$

Мы хотели показать, как с помощью этих формул выводы из треугольников распространяются на $x < 0$. Вот пример:

$$\begin{aligned}\sin(\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{<0}) &= \sin(-\underbrace{\operatorname{arctg}(-x)}_{>0}) = -\sin(\underbrace{\operatorname{arctg}(-x)}_{>0}) = \\ &= -\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x < 0)\end{aligned}$$

Остальные формулы распространяются на отрицательные значения аналогично. Концевые значения $0, \pm 1$ проверяются непосредственной подстановкой.

8. Задача с КФУ 24/25, 11 класс

Задача. Решите уравнение

$$\arcsin(9x - 6) = \arccos(7x - 5)$$

Возьмём синус от обеих частей:

$$\begin{aligned}\arcsin(9x - 6) &= \arccos(7x - 5) \\ 9x - 6 &= \sin(\arccos(7x - 5))\end{aligned}$$

Главное понимать, что само по себе взятие синуса не даёт равносильного перехода (как, например, возведение в квадрат). Пример обсуждали раньше: $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$. Поэтому после нахождения корней их в общем случае надо обязательно проверять.

Воспользуемся формулой $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$:

$$\begin{aligned} 9x - 6 &= \sqrt{1 - (7x - 5)^2} \\ (9x - 6)^2 &= 1 - (7x - 5)^2 \\ 3^2 \cdot (3x - 2)^2 &= 1 - (49x^2 - 70x + 25) \\ 81x^2 - 108x + 36 &= -49x^2 + 70x - 24 \\ 65x^2 - 89x + 30 &= 0 \\ D = b^2 - 4ac &= 89^2 - 4 \cdot 65 \cdot 30 = 7921 - 7800 = \\ &= 121 = 11^2 \\ x_1 &= \frac{89 - 11}{2 \cdot 65} = \frac{78}{130} = \frac{3}{5} \\ x_2 &= \frac{89 + 11}{2 \cdot 65} = \frac{100}{130} = \frac{10}{13} \end{aligned}$$

Заметим, что $9x_1 - 6 = 9 \cdot \frac{3}{5} - 6 = -\frac{3}{5} < 0$, а правая часть неотрицательна. Отбрасываем x_1 .

Проверим оставшийся корень:

$$\begin{aligned} \arcsin(9x_2 - 6) &= \arccos(7x_2 - 5) \\ \arcsin\left(9 \cdot \frac{10}{13} - 6\right) &= \arccos\left(7 \cdot \frac{10}{13} - 5\right) \\ \arcsin\left(\frac{12}{13}\right) &= \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \end{aligned}$$

Обозначим $\alpha = \arcsin \frac{12}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{13}$. Поскольку $\frac{12}{13} > 0$, имеем $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда косинус положителен, и:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13} \\ \begin{cases} \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \subset [0; \pi] \\ \cos \alpha = \frac{5}{13} \end{cases} &\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{5}{13} \end{aligned}$$

Равенство верно.

Ответ: $\frac{10}{13}$.

9. Бонус. Производные аркфункций

Уже известный нам факт:

$$\arcsin(\sin t) = t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Продифференцируем обе части уравнения:

$$(\arcsin(\sin t))' = t'$$

Находим производную как производную сложной функции.

$$\begin{aligned}\arcsin'(\sin t) \cdot \sin' t &= 1 \\ \arcsin'(\sin t) &= \frac{1}{\sin' t} = \frac{1}{\cos t}\end{aligned}$$

Так как при $t = \pm \frac{\pi}{2}$ имеем $\cos t = 0$, дифференцировать это равенство можно только внутри промежутка $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Делаем подстановку:

$$x := \sin t \quad (t = \arcsin x) \implies \arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Используем ранее выведенную формулу $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Чтобы вывести формулу для производной арккосинуса, вспомним ещё один факт:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Возьмём производную от обеих частей. Производная константы — ноль:

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)', \quad \arcsin' x + \arccos' x = 0$$

Производная арккосинуса отличается от производной арксинуса только знаком:

$$\arccos' x = -\arcsin' x, \quad \boxed{\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

С производной арктангенса рассуждаем аналогично, уже заебался расписывать, простите:

$$\begin{aligned}\arctg(\tg t) &= t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ (\arctg(\tg t))' &= t' \\ \arctg'(\tg t) \cdot \tg' t &= 1 \\ \arctg'(\tg t) &= \frac{1}{\tg' t} = \cos^2 t \quad \left(\tg' t = \frac{1}{\cos^2 t}\right) \\ x := \tg t \quad (t = \arctg x) &\implies \arctg' x = \cos^2(\arctg x)\end{aligned}$$

Ранее мы вывели, что $\cos(\arctg x) = 1/\sqrt{1 + x^2}$:

$$\arctg' x = \cos^2(\arctg x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\arctg' x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

$$\arctg x + \arcctg x = \frac{\pi}{2}$$

$$(\arctg x + \arcctg x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)' \quad \arctg' x + \arcctg' x = 0$$

$$\arcctg' x = -\arctg' x, \quad \boxed{\arcctg' x = -\frac{1}{1 + x^2}}$$

10. Все выведенные формулы

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x) &= x, & x \in [-1, 1], \\ \cos(\arccos x) &= x, & x \in [-1, 1], \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) &= x, & x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) &= x, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(\sin x) &= x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \arccos(\cos x) &= x, & x \in [0, \pi], \\ \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) &= x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) &= x, & x \in (0, \pi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x &= \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\arccos x) &= \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \\ \operatorname{tg}(\arcsin x) &= \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\begin{aligned}\arcsin(-x) &= -\arcsin x \\ \operatorname{arctg}(-x) &= -\operatorname{arctg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arccos(-x) &= \pi - \arccos x \\ \operatorname{arcctg}(-x) &= \pi - \operatorname{arcctg} x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \arccos' x &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}' x &= \frac{1}{1 + x^2} \\ \operatorname{arcctg}' x &= \frac{-1}{1 + x^2}\end{aligned}$$