

Преобразования графиков функций

Ниже приведены основные элементарные преобразования графиков функций вида $y = f(x)$.

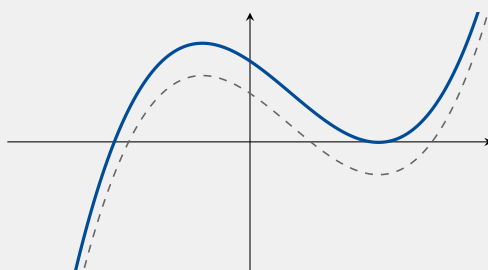
Для наглядности в каждой карточке **толстой синей линией** изображён преобразованный график, а серой штриховой — исходный график $y = f(x)$, где

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)(x-3).$$

Параллельные переносы

Параллельный перенос вдоль оси Oy

$$y = f(x) + A, \quad A \in \mathbb{R}$$



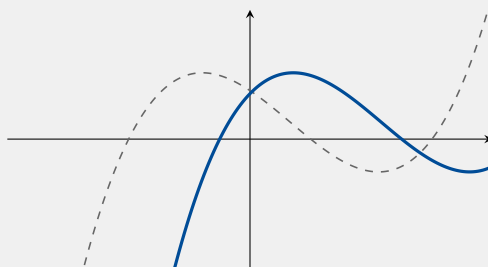
$$\begin{aligned} \text{---} & y = f(x) \\ \text{—} & y = f(x) + 1 \end{aligned}$$

- При $A > 0$ график сдвигается **вверх** на A единиц.
- При $A < 0$ график сдвигается **вниз** на $|A|$ единиц.

К каждому значению функции прибавляется 1, точка $(x, f(x))$ переходит в $(x, f(x) + 1)$.

Параллельный перенос вдоль оси Ox

$$y = f(x - a), \quad a \in \mathbb{R}$$



$$\begin{aligned} \text{---} & y = f(x) \\ \text{—} & y = f(x - 1.5) \end{aligned}$$

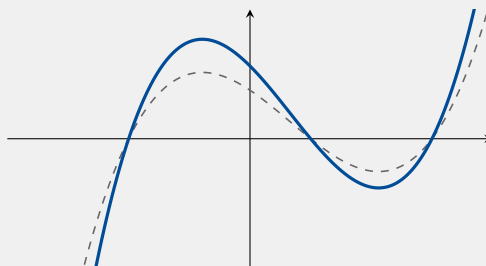
- При $a > 0$ график сдвигается **вправо** на a единиц.
- При $a < 0$ график сдвигается **влево** на $|a|$ единиц.

Чтобы получить прежнее значение $f(x_0)$, теперь нужен $x = x_0 + 1.5$. Минус внутри аргумента сдвигает график в положительную сторону, а не в отрицательную.

Растяжение/сжатие

Растяжение/сжатие по вертикали

$$y = k \cdot f(x), \quad k > 0$$



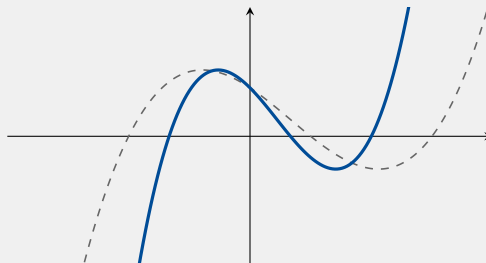
$$\begin{aligned} \text{---} & y = f(x) \\ \text{—} & y = 1.5f(x) \end{aligned}$$

- При $k > 1$ график **растягивается** вдоль оси Oy в k раз.
- При $0 < k < 1$ график **сжимается** вдоль оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз.

Каждое значение y умножается на 1.5, точки удаляются от оси Ox .

Растяжение/сжатие по горизонтали

$$y = f(kx), \quad k > 0$$



$$\begin{aligned} \text{---} & y = f(x) \\ \text{—} & y = f(1.5x) \end{aligned}$$

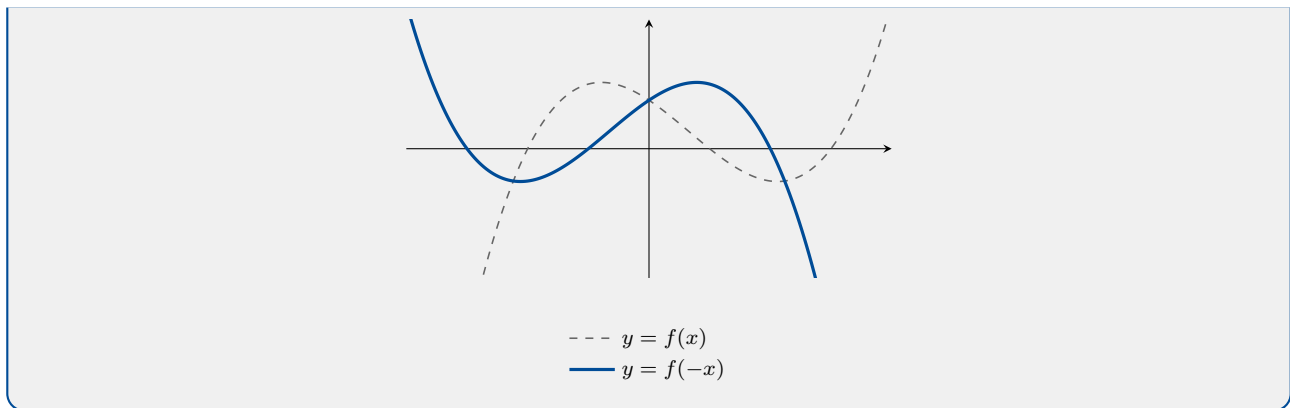
- При $k > 1$ график **сжимается** вдоль оси Ox в k раз.
- При $0 < k < 1$ график **растягивается** вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз.

Чтобы получить прежнее значение $f(x_0)$, теперь нужен $x = x_0/1.5$. Точки приближаются к оси Oy .

Отражения относительно осей

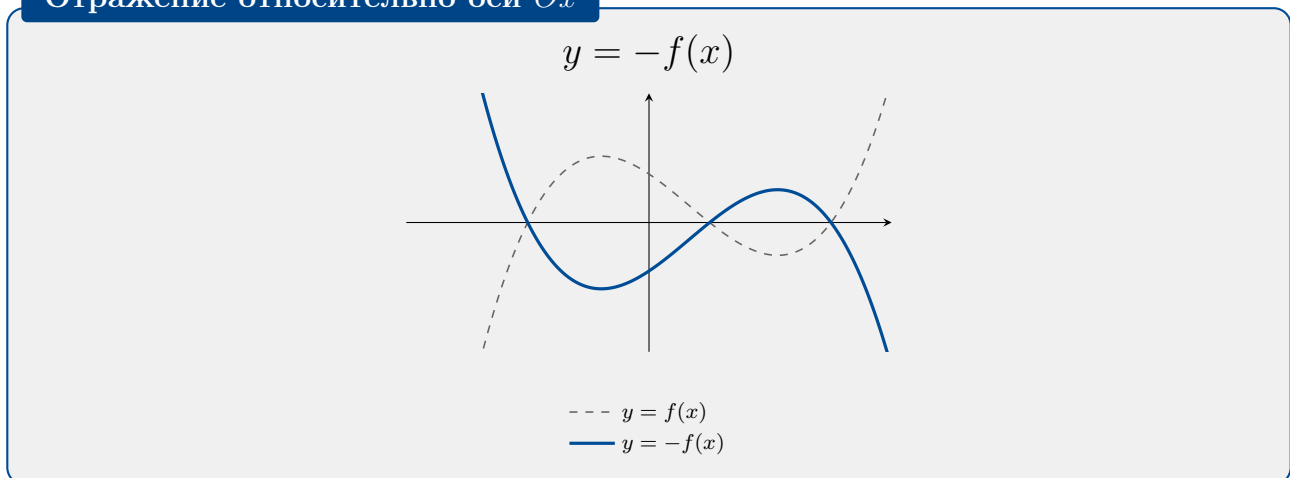
Отражение относительно оси Oy

$$y = f(-x)$$



Точка $(x_0, f(x_0))$ переходит в $(-x_0, f(x_0))$. Первая координата (по оси Ox) меняет знак, а вторая остаётся прежней.

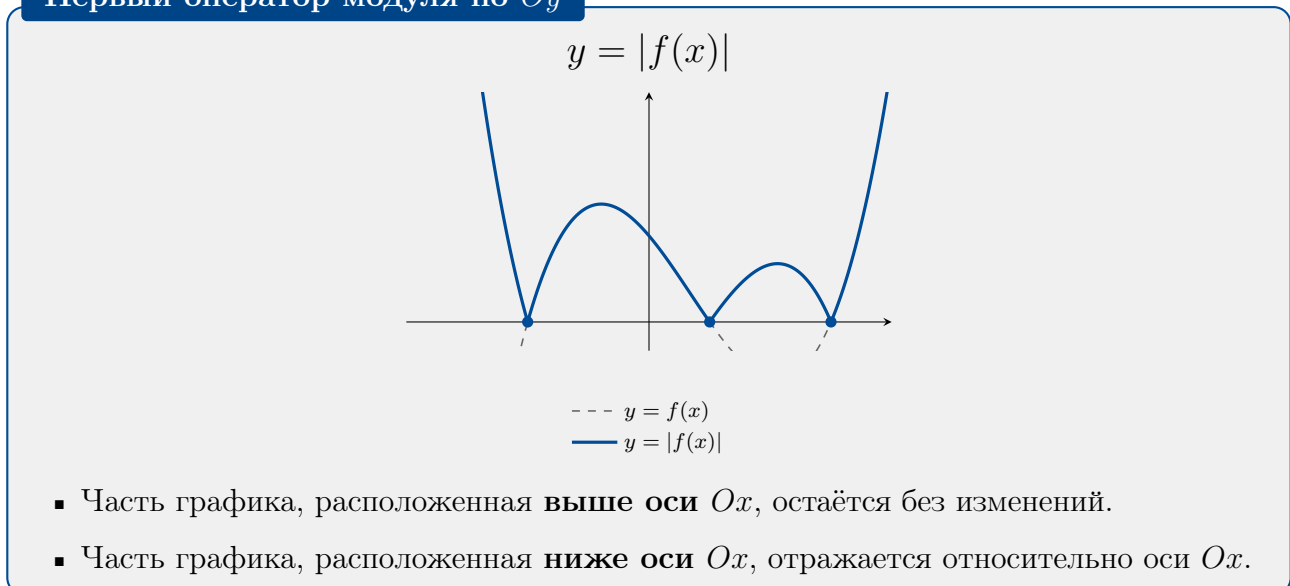
Отражение относительно оси Ox



Точка $(x_0, f(x_0))$ переходит в $(x_0, -f(x_0))$. Первая координата остаётся прежней, а вторая (по оси Oy) меняет знак.

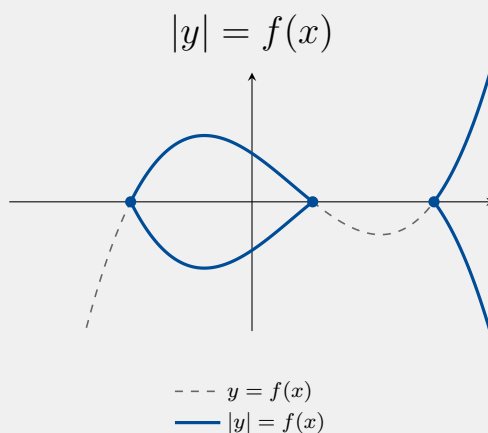
Модули

Первый оператор модуля по Oy



Там, где $f(x) \geq 0$, ничего не меняется, а там, где $f(x) < 0$, значение становится $|f(x)| = -f(x)$.

Второй оператор модуля по Oy

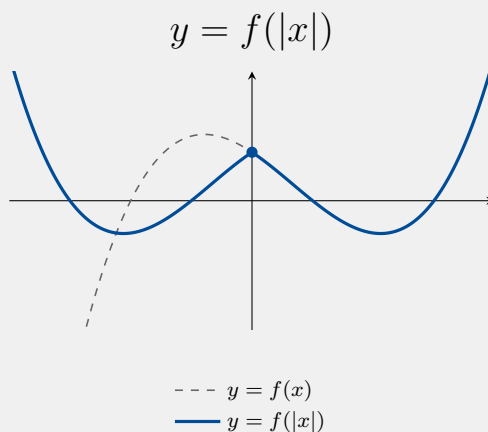


- Часть графика, расположенная **выше оси Ox** , остаётся без изменений и отражается относительно оси Ox .
- Часть графика, расположенная **ниже оси Ox** , исчезает.

Там, где $f(x) \geq 0$, уравнению удовлетворяют сразу два значения, $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ (оба дают модуль $f(x)$), поэтому исходная часть графика дополняется своим отражением вниз.

Там, где $f(x) < 0$, подходящих y нет вовсе, ведь модуль не бывает отрицательным.

Оператор модуля по Ox



- Часть графика при $x \geq 0$ остаётся без изменений.
- Часть графика при $x < 0$ получается отражением правой части относительно оси Oy .

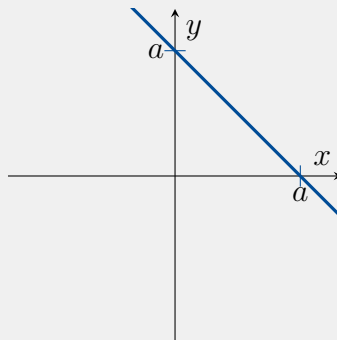
Правая половина ($x \geq 0$) не меняется, а левая заменяется её зеркальной копией. При $x < 0$ значение берётся в точке $-x > 0$, так что график становится симметричным относительно оси Oy .

Бонус. Построим график параметра из ЕГЭ

На ЕГЭ в 2024 году в задаче с параметром встретилось уравнение «ромба», которое вызвало затруднения у многих выпускников. Вместо того чтобы использовать свойства преобразований графиков, многие стали разбирать четыре (!) отдельных случая. Рассмотрим базовое уравнение «ромба» и покажем, как с помощью изученных выше преобразований получить его график.

ЕГЭ-2024. Построение $|x| + |y| = a$, $a > 0$

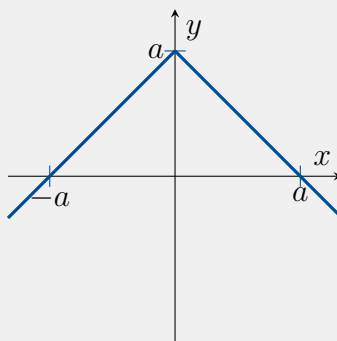
1. Шаг 1. Прямая $x + y = a$.



2. Шаг 2. Накладываем модуль x .

$|x| + y = a$. Часть графика, находящаяся правее оси Oy , отражается относительно неё.

$$|x| + y = a \iff \begin{cases} y = a - x, & x \geq 0, \\ y = a + x, & x < 0. \end{cases}$$



3. Шаг 3. Накладываем модуль на y .

$|x| + |y| = a$. Часть графика, находящаяся выше оси Ox , отражается относительно неё. Получаем «ромбик».

